

Nombres complexes Bac S Réunion

Exercice Bac S Réunion :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v})

Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 1. On considère le point A de (C) d'afixe $z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}$ 1)
 Déterminer l'afixe z_B du point B image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Déterminer
 l'afixe z_C du point C image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. 2. a) Justifier que (C)
 est le cercle circonscrit au triangle ABC . Construire les points A , B et C sur la feuille de papier
 millimétré. b) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier. 3) Soit h l'homothétie de centre O et
 de rapport -2 . a) Compléter la figure en plaçant les points P , Q et R images respectives des points
 A , B et C par h . b) Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier. 4) Dans cette question, le
 candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas. a)
 Donner l'écriture complexe de h . b) Calculer $z_A + z_B + z_C$. En déduire que A est le milieu du
 segment $[QR]$. c) Que peut-on dire de la droite (QR) par rapport au cercle (C) ?

Correction de l'exercice :

Exercice Bac S Réunion :

1) Soit θ un réel. L'expression complexe de la rotation de centre O et d'angle θ est $z' = e^{i\theta}z$. Donc

$$z_B = e^{2i\pi/3} \times z_A = e^{2i\pi/3} \times e^{i\pi/3} = e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1,$$

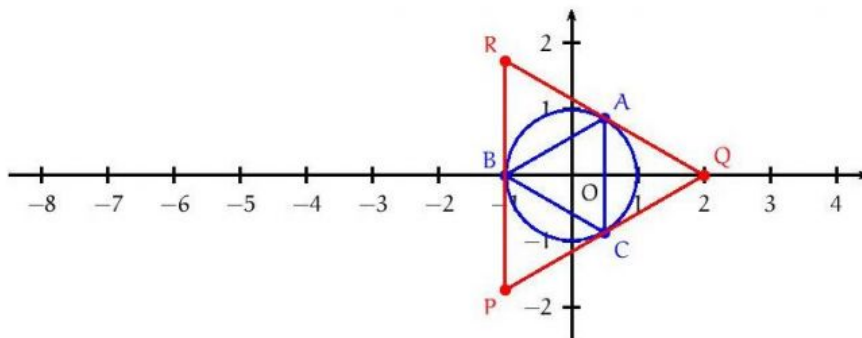
et

$$z_C = e^{2i\pi/3} \times z_B = e^{2i\pi/3} \times e^{i\pi} = e^{5i\pi/3} = e^{-i\pi/3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$z_B = e^{i\pi} = -1 \text{ et } z_C = e^{-i\pi/3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2) a) On sait que pour tout réel θ , $|e^{i\theta}| = 1$. Donc $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 1$ ou encore $OA = OB = OC = 1$. Donc A , B et C sont sur le cercle (\mathcal{C}) ou encore

(\mathcal{C}) est le cercle circonscrit au triangle ABC .



b) Puisque $B = r_{O, 2\pi/3}(A)$ et $C = r_{O, 2\pi/3}(B)$, les trois triangles OAB , OBC et OCA sont isocèles en O , d'angle au sommet $\frac{2\pi}{3}$. Donc les 6 angles \widehat{BAO} , \widehat{ABO} , \widehat{CAO} , \widehat{ACO} , \widehat{BCO} et \widehat{CBO} sont tous égaux à $\frac{\pi}{6}$. Mais alors, les trois angles \widehat{BAC} , \widehat{ABC} et \widehat{ACB} sont égaux à $\frac{\pi}{3}$ et par suite

le triangle ABC est équilatéral.

3) a) Voir figure ci-dessus.

b) L'image d'un triangle équilatéral par une homothétie est un triangle équilatéral et donc

le triangle PQR est équilatéral.

4) a) Soit $k \in \mathbb{R}$. L'écriture complexe de l'homothétie de centre O et de rapport k est $z' = kz$. Ici, $k = -2$ et donc

l'écriture complexe de h est $z' = -2z$.

b) Le triangle ABC est équilatéral de centre O . En particulier, O est le centre de gravité du triangle ABC . On en déduit que $\frac{z_A + z_B + z_C}{3} = 0$ et donc que

$$z_A + z_B + z_C = 0.$$

Maintenant, d'après la question a), on a $z_Q = -2z_B$ et $z_R = -2z_C$. Par suite,

$$\frac{z_Q + z_R}{2} = \frac{-2z_B - 2z_C}{2} = -z_B - z_C = z_A,$$

et donc

A est le milieu du segment [QR].

c) Par suite, la droite (AP) est la médiane issue de P du triangle équilatéral PQR. On en déduit que la droite (AP) est aussi la médiatrice du segment [QR] et en particulier que la droite (AP) est perpendiculaire à la droite (QR). Maintenant, puisque $P = h(A)$, les points P, O et A sont alignés et donc la droite (AP) est encore la droite (OA).

En résumé, le rayon [OA] est perpendiculaire en A à la droite (QR) et on sait alors que

la droite (QR) est tangente au cercle (\mathcal{C}) en A.