EXERCICE 7 spécialité

L'espace (E) est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On considère les points A(0 ; 5 ; 5) et B(0 ; 0 ; 10).

1°) Dans cette question, on se place dans le plan P_0 d'équation $x = 0$ rapporté au repère $(O;\vec{j},\vec{k})$.
On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre B passant par A.
Démontrer que la droite (OA) est tangente au cercle $\mathscr{C}$.

2°) On nomme $\mathscr{S}$ la sphère engendrée par la rotation du cercle $\mathscr{C}$ autour de l'axe (Oz) et Γ le cône engendré par la rotation de la droite (OA) autour de l'axe (Oz).
a) Démontrer que le cône Γ admet pour équation $x^2 + y^2 = z^2$.
b) Déterminer l'intersection du cône Γ et de la sphère $\mathscr{S}$.
Préciser la nature de cette intersection et ses élements caractéristiques.
c) Illustrer ces objets par un schéma dans l'espace.

3°) On coupe le cône Γ par le plan P_1 d'équation $x = 1$.
Dans P_1, l'une des trois figures ci-dessous représente cette intersection.
Identifier cette figure en donnant les justifications nécessaires.

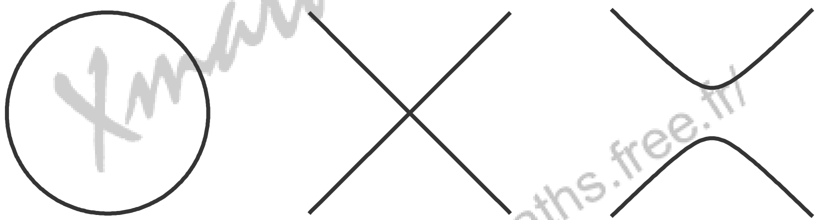

Figure 1 Figure 2 Figure 3

4°) Soit M(x ; y ; z) un point du cône Γ dont les coordonnées sont des entiers relatifs.
Démontrer que x et y ne peuvent pas être simultanément impairs.