Fonction exponentielle

1

I. Définitions

- La fonction exponentielle (notée exp) est définie par :
  Si $x \in$ R et $y \in \left]0;+\infty\right[$:
  $$y = \exp(x) = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y)$$

  La fonction exponentielle est la fonction qui à tout réel x associe le réel noté $\exp(x)$ dont le logarithme népérien est x. La fonction exponentielle est ainsi appelée fonction réciproque de la fonction $\ln$.

- On a ainsi pour tout x réel strictement positif : $x = e^{\ln(x)}$,
  et pour tout réel x : $\ln(e^x) = x$.

II. Etude de la fonction exponentielle

- **Sens de variation**

- La fonction exponentielle est définie et dérivable sur R, et on a :
  $$\exp'(x) = \exp(x).$$

  Par conséquent, la fonction exponentielle est strictement croissante sur R.

- Soient a et b deux nombres réels :
  $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
  $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$

2

- **Limites**

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, on peut donc dire que l'axe des abscisses est asymptote à la courbe représentative de la fonction exponentielle en $-\infty$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$, $(n \in \mathbb{N}^*)$.

III. Propriétés

Soient a et b deux nombres réels et $n \in$ Z.

- $e^0 = 1$; $e^1 = e$ avec $e \approx 2{,}71$ à 10^{-2} près.
- $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$.
- $(e^a)^n = e^{na}$.
- $e^{b-a} = \dfrac{e^b}{e^a}$; $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$.

3

- Soit a un réel strictement positif et x un réel :
  $$a^x = e^{x\ln(a)}$$
- $\forall x \in R$, $e^x > 0$.

IV. Dérivation, primitives

- $\forall x \in$ R, on a $(e^x)' = e^x$.
- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de R, la dérivée de $\exp \circ u$ est :
  $$\forall x \in I,\quad (e^u)'(x) = u'(x)e^{u(x)}.$$
- La fonction f définie par $f(x) = e^x$ a pour primitives :
  $F(x) = e^x + k$ avec $k \in$ R.
- Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de R, $u'e^u$ a pour primitives $e^u + k$ avec $k \in$ R.

4

MemoPage.com SA © / Auteur : Nicolas Montétagaud / Expert : C. V. / juin 2002 / ISSN : 1762 – 5920