Tale S Maths

Nombres complexes : Méthodes et formules

I. Les différentes formes d'un nombre complexe

- **Forme algébrique : Z = a+ i b**

Re(Z)= a ; Im(Z)= b (Attention pas ib),a et b sont des réels.
En géométrie : à chaque complexe z , on associe le point M du plan dont les coordonnées sont (a, b) (le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$)).

- **Forme trigonométrique : Z = r (cos θ + i sin θ)**

r est le module de Z, r = |Z|
θ est un argument de Z, arg Z = θ
Forme exponentielle : Z = r $e^{i\theta}$
Par définition, $e^{i\theta}$ = cos θ + i sin θ

- **Lien entre les différentes formes :**

|Z|=r = $\sqrt{a^2+b^2}$
arg Z = θ, avec cos θ = a / r et sin θ = b / r

II. Méthodes

- **On a une forme algébrique : z = 1-i, on cherche les autres formes**

1. On calcule le module r = $\sqrt{1^2+1^2}$ = $\sqrt{2}$ (car a = 1 et b = -1)
2. On calcule un argument de z : cos θ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et sin θ = -$\frac{1}{\sqrt{2}}$; on cherche alors un angle connu dont le cosinus et le sinus sont donnés ci-dessus ; on trouve en radians - $\frac{\pi}{4}$(à 2kπ près).

On obtient z = $\sqrt{2}$(cos (-$\frac{\pi}{4}$) + i sin (-$\frac{\pi}{4}$)) qui est la forme trigonométrique de z. Et sa forme exponentielle est :

z = $\sqrt{2}\ e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

- **On a la forme exponentielle** z = 3 $e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}$, **on cherche les autres formes**

1. On obtient immédiatement la forme trigonométrique z = 3 (cos (- $\frac{5\pi}{6}$) + i sin (- $\frac{5\pi}{6}$)), puis la forme algébrique en retrouvant les valeurs exactes de cos (- $\frac{5\pi}{6}$) et sin (- $\frac{5\pi}{6}$).
2. cos(- $\frac{5\pi}{6}$) = $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ et sin (- $\frac{5\pi}{6}$) = $\frac{-1}{2}$, on a alors z = 3 ($\frac{-\sqrt{3}}{2}$ - i $\frac{1}{2}$) = $\frac{-3\sqrt{3}}{2}$- i $\frac{3}{2}$.

La partie réelle de z est $\frac{-3\sqrt{3}}{2}$, sa partie imaginaire est -$\frac{3}{2}$.

Résolution d'équations
On résout dans C (ensemble des nombres complexes), des équations avec les mêmes méthodes que dans l'ensemble des réels R.

- **Résoudre l'équation suivante : 3+iz = 4z-5i**

Comme dans R, on isole l'inconnu ; ici il est inutile de passer par la forme algébrique.

On obtient : iz –4z = -3 –5 i, soit z(i-4) = -3 –5i , z = $\frac{-3-5i}{i-4}$

Ceci n'est pas une forme algébrique, il faut multiplier par le conjugué du dénominateur pour l'obtenir, cette méthode est à connaître parfaitement.

z = $\frac{-3-5i}{i-4}=\frac{3+5i}{4-i}=\frac{(3+5i)(4+i)}{(4-i)(4+i)}=\frac{12+3i+20i-5}{16+1}=\frac{7+23i}{17}$

La partie réelle de z est 7/17, et sa partie imaginaire est 23/17.
Attention au dénominateur : (4-i)(4+i) = 4²-i² = 16-(-1) = 16+1=17 .

- **Résoudre l'équation suivante : -3+z = 2z – 4i**

Attention, cette équation fait intervenir le conjugué de z
(si z = a+ib, son conjugué est $\bar{z}$ = a – i b).
On doit écrire z sous sa forme algébrique.
-3+a+ib = 2 (a - i b) - 4i, on cherche alors les deux **réels** a et b.
-a + 3ib = 3 - 4i ,
deux complexes sont égaux s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire ,
soit ici –a = 3 et 3b = -4 , ce qui donne a = -3 et b = - 4/ 3,
z = -3 – i 4 /3 , ceci est la forme algébrique de z.

- **Equations du second degré**

Soit une équation à coefficients réels a z² +bz +c = 0, on la résout comme dans R, avec le discriminant : s'il est positif ou nul, mêmes solutions que dans R ; s'il est négatif alors il y a deux solutions complexes.
Δ = -d où d>0, on écrit Δ = i²d, et les solutions sont :
$z_1=\frac{-b-i\sqrt{d}}{2a}$ et $z_2=\frac{-b+i\sqrt{d}}{2a}$

- **Un exemple :**

Résoudre dans C l'équation suivante : z²+z+1=0
On calcule Δ = 1 - 4= -3 = $(i\sqrt{3})^2$
On a deux solutions complexes $z_1=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$
On peut trouver leurs formes exponentielles (ou trigonométriques).
$|z_1|=\sqrt{(-\frac{1}{2})^2+(-\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=1$, de même $|z_2|=\sqrt{(-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=1$,
on sait que cos(- $\frac{2\pi}{3}$) = $\frac{-1}{2}$ et sin (- $\frac{2\pi}{3}$) = $\frac{-\sqrt{3}}{2}$, on a alors
$z_1=e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$, et $z_2=e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$.
Soit s = { $e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$, $e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$}.

Editeur : MemoPage.com SA © / 2006 / Auteur : C. V.