Les primitives : exercices et méthodes

I. Méthodes

Comment trouver une primitive d'une fonction sur un intervalle donné :

- Directement en appliquant une formule de primitive (voir le MemoPage intitulé « Primitives, calcul intégral »).
- On nous donne une primitive : il faut dériver cette fonction pour vérifier que sa dérivée est bien f.
- On applique une formule à un coefficient près : il faut réajuster la formule (voir exercices ci-dessous).

II. Exemples

1. Donner une primitive de la fonction définie sur]0 ; +∞ [par : $f(x) = x - 10 + 3/x$

- Une primitive de x est $x^2/2$
- Une primitive de – 10 est $-10x$
- Une primitive de $3/x$ est $3\ln x$ (on cherche une primitive de kf qui est kF)
- Une primitive de f est $F(x) = x^2/2 - 10x + 3\ln x$

2. Soit $f(x) = \ln(2x+4)$ sur I=]0 ; +∞ [.
Vérifier que la fonction $F(x) = (x+2)\ln(2x+4) - x$ est une primitive de f sur I.
Il faut dériver F. On utilise la formule $(uv)' = u'v + uv'$

$F'(x) = \ln(2x+4) + (x+2) \times 2/(2x+4) - 1$
or $2 \times (x+2)/(2x+4) = (2x+4)/(2x+4) = 1$
On obtient $F'(x) = \ln(2x+4) + 1 - 1 = \ln(2x+4) = f(x)$.

3. Quelquefois, il faut «réajuster» le coefficient pour trouver la formule qui convient :
Donner une primitive de $f(x) = (-x+2)/(x^2 - 4x - 5)$ sur I

Méthode :
on cherche la formule qui semble convenir , c'est u'/u...
on pose u(x) = x²-4x-5 et on dérive u'(x) = 2x-4
on écrit f (x) = *(-1/2)* (2x-4) / (x²-4x-5) et on réajuste avec une constante pour retrouver f, ici *-1/2*
on a alors F (x) = *(-1/2)* ln (x²-4x-5)

III. Exercice

Donner une primitive des fonctions suivantes sur]0 ; +∞ [

1. $f(x) = 3 + 2/(x-4)$
2. $h(x) = e^{2x} - 3e^x + 4$
3. $t(x) = 1/x - 2(\ln x)/x$
4. $p(x) = x - 20 + 400/x$
5. $q(x) = x + 2 - 3e^x/(e^x+1)$

IV. Corrigé

1. $f(x) = 3 + 2/(x-4)$

- Une primitive de 3 est $3x$.
- Pour 2/(x-4) , il faut chercher une formule qui corresponde ici , il s'agit de u'/u.qui a pour primitive : $\ln u$.
- On pose $u(x) = x - 4$, on a alors $u'(x) = 1$.
- Une primitive de $2/(x-4)$ est $2\ln(x-4)$ soit $F(x) = 3x + 2\ln(x-4)$.

2. $h(x) = e^{2x} - 3e^x + 4$ (attention ici ce n'est pas e^x mais e^{2x})

- Il faut chercher la formule ... il s'agit de $u'e^u$ dont une primitive est e^u , on pose $u(x) = 2x$ ... $u'(x) = 2$.
- On réajuste avec une constante $\dfrac{2e^{2x}}{2}$ a pour primitive $\dfrac{e^{2x}}{2}$.
- $H(x) = \dfrac{e^{2x}}{2} - 3e^x + 4x$

3. $t(x) = 1/x - 2(\ln x)/x$

- Une primitive de $1/x$ est $\ln x$ (formule du cours)
- **Attention** : $2(\ln x)/x$ est une expression compliquée , l'astuce est de l'écrire sous la forme : $2(1/x)\ln x$, on aperçoit alors la formule : $n\,u'\,u^{n-1}$
- On pose $u(x) = \ln x$ ... $u'(x) = 1/x$ on applique la formule pour n=2
- Une primitive de $2(1/x)\ln x$ est $(\ln x)^2$
- $T(x) = \ln x - (\ln x)^2$

4. $p(x) = x - 20 + 400/x$

- une primitive de x est $x^2/2$
- une primitive de - 20 est $-20x$
- une primitive de $400 \times (1/x)$ est $400\ln x$
- $P(x) = x^2/2 - 20x + 400\ln x$

5. $q(x) = x + 2 - 3e^x/(e^x+1)$

- Une primitive de $x+2$ est $x^2/2 + 2x$
- Pour $-3e^x/(e^x+1)$; il s'agit de la formule u'/u
- On pose $u(x) = e^x + 1$ ... $u'(x) = e^x$ une primitive de $-3e^x/(e^x+1)$ est $-3\ln(e^x+1)$
- $Q(x) = x^2/2 + 2x - 3\ln(e^x+1)$

V. Recherche d'une primitive particulière

On cherche k tel que $B(x) = x^2/2 + 2x - 3\ln(e^x+1) + k$ vérifie $B(0) = -2\ln 2$;
ici $B(0) = 0 + 0 - 3\ln(e^0+1) + k = -3\ln 2 + k = -2\ln 2$; on en déduit
$k = -2\ln 2 + 3\ln 2 = \ln 2$

La primitive de q qui prend la valeur $-2\ln 2$ en 0 sur l'intervalle donné est $B(x) = x^2/2 + 2x - 3\ln(e^x+1) + \ln 2$

Editeur : MemoPage.com SA © / 2006 / Auteur : C. V.

Le MemoPage ne se coupe pas, il se plie en 2 puis encore en 2.

MemoPage.com
Modèle déposé
Tous droits réservés
ISSN 1762-5920