BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

STI ARTS APPLIQUÉS

MATHÉMATIQUES

SESSION 2008

Durée : 2 heures Coefficient : 2

L'usage d'une calculatrice réglementaire est autorisé durant l'ensemble de l'épreuve
Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet
1 feuille de papier millimétré est fournie

Dès que le sujet vous est remis, assurez- vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3.

SUJET SORTI

EXERCICE 1 (8 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Parmi les réponses proposées, une seule est correcte. On indiquera sur la copie, pour chaque question, la lettre correspondant à la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Toutes les questions sont indépendantes. Chaque réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. A et B sont 2 évènements. La probabilité de l'évènement A est 0,4.
La probabilité de l'événement B est 0,6. La probabilité de l'évènement $A \cap B$ est 0,2.
La probabilité de l'événement $A \cup B$ est :

a) 0,8 **b)** 1 **c)** 1,2 **d)** 0,2

2. Une urne contient six boules : deux blanches notées B_1, B_2, trois jaunes notées J_1, J_2, J_3, une verte notée V. On tire 2 boules de l'urne simultanément. On pourra s'aider d'un tableau.
La probabilité de l'évènement « les 2 boules tirées ont la même couleur » est :

a) $\frac{2}{30}$ **b)** $\frac{14}{36}$ **c)** $\frac{8}{30}$ **d)** $\frac{22}{30}$

3. Dans un repère orthonormé, on considère la courbe (C) d'équation : $25x^2 - 36y^2 - 900 = 0$
Cette courbe est :

a) une ellipse **b)** un cercle **c)** une hyperbole **d)** une parabole

4. Dans un repère orthonormé, l'ellipse (E) a pour équation : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

Un de ses foyers a pour coordonnées :

a) $(2\sqrt{5}\,;0)$ **b)** $(0\,;2\sqrt{5})$ **c)** $(0\,;2\sqrt{3})$ **d)** $(2\sqrt{3}\,;0)$

5. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
L'aire du domaine compris entre C, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$ est, en unités d'aire :

a) 6 **b)** 10 **c)** 13 **d)** -6

6. La dérivée de la fonction f définie sur $\left]\frac{1}{3}\,; +\infty\right[$ par : $f(x) = \ln(3x-1)$ est :

a) $f'(x) = \frac{1}{3x-1}$ **b)** $f'(x) = 3$ **c)** $f'(x) = \frac{3}{3x-1}$ **d)** $f'(x) = \frac{1}{(3x-1)^2}$

7. Une primitive de la fonction f, définie sur $]0\,; +\infty[$ par : $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x}$ est :

a) $F(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$ **b)** $F(x) = x^2 + x + \ln x$ **c)** $F(x) = 2 + \ln x$ **d)** $F(x) = 2$

8. La solution de l'équation : $\frac{1}{2}e^x = 5$ est :

a) 2ln5 **b)** ln10 **c)** 10 **d)** e^{10}

EXERCICE 2 (12 points)

Pour une entreprise de production d'énergies renouvelables, un graphiste conçoit un logo dont la construction apparaît dans le problème suivant.

PARTIE A

Soit la fonction f définie sur [0 ; 2] par : $f(x) = e^x + 1$

C désigne sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, d'unité graphique 1cm.

1) a) Calculer la dérivée de la fonction f et étudier son signe sur l'intervalle [0 ; 2].
   b) Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle [0 ; 2].

2) Recopier et compléter le tableau suivant. Les résultats seront arrondis à 10^{-1}près.

x	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$					

3) Construire la courbe C de la fonction f. Le point O sera placé au centre de la feuille de papier millimétré.

PARTIE B

Soit la fonction g définie sur l'intervalle [0 ; 2] par : $g(x) = -x^2 + 2x$
et C' sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer la dérivée de la fonction g et dresser le tableau de variation de g sur [0 ; 2].

2) Donner une équation de la tangente T à la courbe C' en son point d'abscisse 2.

3) Construire T et C' dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

PARTIE C

On appelle D le domaine compris entre C, C' et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.
On admet que $f(x) \geq g(x)$ pour tout x de l'intervalle [0 ; 2] et que l'aire du domaine D, en unités d'aire, est donnée par la formule $A = \int_0^2 [f(x) - g(x)]\,dx$.
Calculer la valeur exacte de cette aire en cm^2, puis la valeur arrondie à 10^{-1} près.

PARTIE D

1) Dessiner le domaine D_1, symétrique de D par rapport à O.
Colorier le domaine réunion de D_1 et D.
2) Dessiner le domaine D_2, obtenu par rotation de centre O et d'angle 90° du domaine colorié précédemment.

BACCALAURÉAT, SÉRIES STT spécialités comptabilité et gestion, informatique et gestion

STL spécialité biochimie - génie biologique

STI Arts Appliqués

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. STATISTIQUE *(SÉRIES STL, STT)*

Moyenne, variance, écart type

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad ; \quad V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)}$$

Dans le cas d'un regroupement en classes :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i \ ; V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - (\bar{x})^2$$

II. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad ; \quad P(\Omega) = 1 \quad ; \quad P(\varnothing) = 0$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \dfrac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

III. ALGÈBRE

A. *SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES*

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $\quad S_n = 1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$

Si $b = 1$, $\quad S_n = n + 1$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad ; \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

C. *ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ*

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, une solution réelle double

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$, aucune solution réelle.

Si $\Delta \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

IV. ANALYSE

A. *PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES*

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\ln ab = \ln a + \ln b$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,

$y = \exp x = e^x$ équivaut à $x = \ln y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x \ln a}$ $(a > 0)$

$\left(e^a\right)^b = e^{ab}$

$\ln a^x = x \ln a$

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ $(x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$

$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. *LIMITES USUELLES DE FONCTIONS*

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

Croissances comparées à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, n entier naturel

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$, n entier naturel non nul

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty,+\infty[$
x	1	$]-\infty,+\infty[$
$x^n, n\in\mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\frac{1}{x^n}, n\in\mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$x^\alpha, \alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0,+\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty,+\infty[$

(SÉRIES F12, STL)

$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty,+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty,+\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(u+v)' = u'+v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v+uv'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$(v\circ u)' = (v'\circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$

D. *CALCUL INTÉGRAL* *(SÉRIES F12, STT)*

Formule fondamentale

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$

Formule de Chasles

$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$

$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$

Linéarité

$\int_a^b (\alpha f(t)+\beta g(t))dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt$

Positivité

Si $a\leqslant b$ et $f\geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a\leqslant b$ et $f\leqslant g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

E. *ÉQUATIONS DIFFERENTIELLES (SÉRIE STL)*

Équations	Solutions sur $]-\infty,+\infty[$
$y'-ay=0$	$f(x)=ke^{ax}$